Lista 6: CM300 Introdução ao Cálculo

A. Ramos *

November 18, 2019

Abstract

Funções trigonométricas, inversas, etc.

1 Exercícios

Refaça os exercícios desenvolvidos em aula.

1.1 Funções trigonométricas

1. Verifique que as seguintes expressões são identidades
   (a) $\sin^4(\theta) - \cos^4(\theta) = \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)$.
   (b) $\csc\theta - \sin\theta = \cot\theta\cos\theta$
2. Encontre todas as soluções de
   (a) $\sin t = \sqrt{3}/2$ *Rpta* : $C.S = \{\pi/3 + 2\pi n, 2\pi/3 + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$
   (b) $\cos^2 t = 3/4$ *Rpta* : $C.S = \{\pi/6 + 2\pi n, 5\pi/6 + 2\pi n, 7\pi/6 + 2\pi n, 11\pi/6 + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.
3. Dentro do intervalo $[0, 2\pi)$, encontre todas as soluções de
   (a) $2\sin^2 t = -\sin t$ *Rpta* : $C.S = \{0, \pi, 7\pi/6, 11\pi/6\}$
   (b) $1 - \cos t = 2\sin^2 t$ *Rpta* : $C.S = \{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$.
4. Converta de radianos para graus: (a) $5\pi/3$; (b) $\pi/36$; (c) $3\pi/2$
   Rpta: (a) 3900°; (b) 5°; (c) 270°
5. Converta de gruas para radianos (a) 30°; (b) 135°; (c) 15° (d) 1080°
   Rpta: (a) $\pi/6$; (b) $3\pi/4$; (c) $\pi/12$ (d) 6π
6. Esboce os gráficos das funções, indicando sua amplitude A e período T.
   (a) $f(x) = \sin x$ *Rpta:* $A = 1$, $T = 2\pi$
   (b) $f(x) = \cos 2x$ *Rpta:* $A = 1$, $T = \pi$
   (c) $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2}) - 2$ *Rpta:* $A = 2$, $T = 4\pi$
   (d) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 3$ *Rpta:* $A = 1$, $T = 2\pi$
   (e) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(3x + \frac{x}{4}) + \frac{3}{2}$ *Rpta:* $A = 1/2$, $T = 2\pi/3$
   (f) $f(x) = 3\sin(5x - \pi) + 6$ *Rpta:* $A = 3$, $T = 2\pi/5$
7. Faça a substituição $u := \arcsin(x/3)$ para simplificar
   (a) $\sqrt{9 - x^2}$ *Rpta:* $3\cos u$
   (b) $\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ *Rpta:* $3\tan u \sin u$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

8. Faça a substituição $u := \arctan(x/4)$ para simplificar

   (a) $\sqrt{16+x^2}$ *Rpta:* $4\sec u$

   (b) $\frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3}$ *Rpta:* $\frac{\cos^2 u}{16\sin^3 u}$.

9. Em certa cidade, o dia mais quente do ano, em média é o dia 7 de agosto, quando a temperatura média é de 30°. O dia mais frio do ano tem uma temperatura média de 14°.

   Use uma função trigonométrica (coseno ou seno) para modelar a temperatura da cidade, supondo que o ano dura 365 dias. Com essa função calcule os dias em que a temperatura seja de 20°.

   Rpta: Temperatura $T(d) = 8\cos(\frac{2\pi}{365}d) + 22$, onde d está dado em dias.

10. Um artista está tocando uma sanfona. O comprimento da sanfona é uma função $A(t)$ (medido em cm) onde t é o tempo medido em segundos, qual é modelada por $A(t) = a\cos(bt) + d$. Quando $t = 0$, a sanfona mede 15 cm que é o seu menor comprimento. Para $t \in (0, 1.5)$ o comprimento da sanfona está crescendo, e no tempo $t = 1.5$, a sanfona está no comprimento médio de 21 cm. Com essas informações, calcule a, b e d.

    Rpta: $a = 6$, $b = \pi/3$, $d = 21$

11. Simplifique as seguintes expressões:

    (a) $\sin(\arccos x)$ *Rpta:* $\sqrt{1-x^2}$.

    (b) $\cos(\arctan x)$ *Rpta:* $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

    (c) $\tan(2\arccos(x))$ *Rpta:* $\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}$.

12. Calcule :

    (a) $\sin(\frac{1}{2}\arccos(\frac{4}{5}))$ *Rpta:* $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

    (b) $\cos(2\arctan(\frac{2}{3}))$ *Rpta:* $\frac{1}{9}$.

    (c) $\sec(2\arctan(\frac{1}{2}))$ *Rpta:* $\frac{5}{3}$.

13. Use a fórmula de mudança de fase para escrever

    (a) $3\cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x$ *Rpta:* $2\sqrt{3}\cos(4x - \frac{\pi}{6})$

    (b) $6(\cos 3x - \sin 3x)$ *Rpta:* $6\sqrt{2}\cos(3x + \frac{\pi}{4})$

14. Simplifique as expressões algébricas

    (a) $\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$ com $x = 2\sin u$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ *Rpta* :$\frac{1}{4}\sec u \csc u$

    (b) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ com $x = a\sec u$, $u \in [0, \pi/2)$ *Rpta:* $\sin u$

15. Encontre as soluções no intervalo $[0, 2\pi)$

    (a) $2\cos^2 x + 3\sin x$ *Rpta:* $\pi/3$, $5\pi/3$

    (b) $\tan x - \sec x = 1$ *Rpta:* π

16. Um bote está no meio do mar boiando. A distância do bote $d(t)$ (em metros) ao fundo do mar, é uma função do tempo (em segundo) e pode ser modelada como $A\sin(bt) + d$. Quanto $t = 0$, o bote está exatamente no meio da sua oscilação e está a $1m$ acima do fundo. Se para $t \in (0, \pi/4)$ o bote está subindo e chega à sua altura máxima de $1.2cm$ depois de $\pi/4$ segundos.

    Rpta: $b = 2$, $A = 0.2$, $d = 1$.